

Chapitre 14 : Applications du produit scalaire

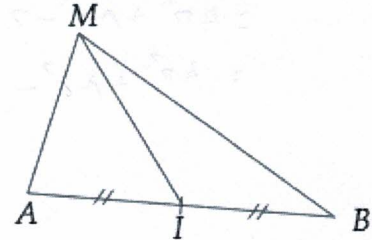
1. Théorème de la médiane

Théorème :

Soient A et B deux points du plan et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$



Démonstration :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 - \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \text{ car } I \text{ est le milieu de } [AB] \\ &= MI^2 - \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$$

Exemple :

Considérons le triangle MAB tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -2$ et $AB = 4$. Soit I le milieu de $[AB]$, déterminer MI .

Par le théorème de la médiane :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= MI^2 - \frac{AB^2}{4} \\ \Leftrightarrow MI^2 &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} \\ \Leftrightarrow MI^2 &= -2 + \frac{4^2}{4} \\ MI^2 &= 10 \end{aligned}$$

2. Formule d'Al-Kashi

Propriété :

Dans un triangle ABC ,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 BC^2 &= \vec{BC} \cdot \vec{BC} \\
 &= (\vec{BA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) \\
 &= \vec{BA} \cdot \vec{BA} + \vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{BA} + \vec{AC} \cdot \vec{AC} \\
 &= AB^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} + AC^2 \\
 &= AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} \\
 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})
 \end{aligned}$$

3. Caractérisation du Cercle

Propriété :

équivalence

Soient A, B et M trois points du plan. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration :

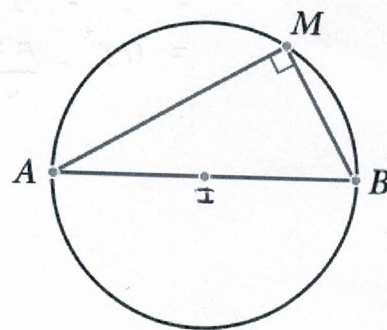
$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \quad \text{par le théorème de la médiane}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2} \quad \text{car } MI > 0$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{au cercle de centre } I \text{ et de rayon } \frac{AB}{2}.$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{au cercle de diamètre } [AB].$$



Remarque :

Cela revient à dire que l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.